ETUDE DES DEFORMATIONS DANS LES PONTS FERROVIAIRES EN TENANT COMPTE DES EFFETS DE LA TORSION MIXTE

Par :
Lamara YEZLI
Ingénieur E.N.P. - Docteur d'Etat es Sciences Appliquées
U.L.B. (Belgique).
Maître de Conférence à l' U.S.T.H.B. (Alger).

1 INTRODUCTION

Dans l'article précédent (Algerie EQUIPEMENT [AE] N°2), nous avons développé une méthode de calcul qui permet de déterminer l'ensemble des déformations sujettes à d'éventuelles limitations, produites dans un pont ferroviaire.

Le pont peut être droit ou biais, ayant une ou plusieurs travées isostatiques ou continues mais susceptibles d'être sollicitées en torsion non-uniforme.

Dans le présent article, nous allons traiter le cas d'un ouvrage sollicité en torsion mixte.

Une travée est sollicitée en torsion mixte lorsque la valeur du paramètre χ (expression [3.1] dans AE N°0) est comprise entre 0,5 et 10,0.

La torsion mixte se produit lorsque les deux raideurs, de torsion non-uniforme et de Saint-Venant, ne peuvent être négligées l'une par rapport à l'autre.

Des ouvrages de type "*massif*" ou mixtes acier-béton à poutres métalliques préfléchies [1], [2] et [3], qui sont dans ce cas, sont envisagés dans nos applications.

Nous conservons les notations précédemment définies.

2 EFFORTS INTERIEURS

2.1 Cas d'une travée droite

L'équation différentielle de la torsion mixte s'écrit :

$$EI_{(\omega\omega)} \cdot \varphi^{IV} - GK\,\varphi'' = m_D$$

Comme :

$$\chi = \sqrt{(GK\ell^2 / EI_{(\omega\omega)})} \qquad (3.1)\ (\text{AE n°0}).$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$\varphi^{IV} - (\chi^2/\ell^2)\,.\,\varphi'' = m_D \qquad (1)$$

Dans le cas d'une travée de portée ℓ, la solution générale de l'équation (1) est :

$$\varphi = C_1 + C_2\,\xi + C_3\,\mathrm{sh}\chi\xi + C_4\,\mathrm{ch}\chi\,\xi + \overline{\varphi} \qquad (2)$$

En dérivant par rapport à z, de sorte que :

$$d\xi / dz = 1/\ell$$

on peut déduire successivement :

1°) le moment de torsion de Saint-Venant (T_S),
2°) le bimoment (M_ω),
3°) Le moment de torsion total (T).

$$T_s = GK\, C_2 \,.\, (1/\ell) + GKC_3 \,.\, (\chi/\ell) \,.\, \text{ch}\chi\xi +$$

$$+ GKC_4 \,.\, (\chi/\ell) \,.\, \text{sh}\chi\xi + GK\bar{\varphi}' \qquad (3)$$

$$M_\omega = - GK\,(C_3\ \text{sh}\chi\xi + C_4\,\text{ch}\chi\xi) - EI_{\omega\omega}\,\bar{\varphi}'' \qquad (4)$$

$$T = GK\varphi' - EI_{\omega\omega}\,\varphi'''$$

$$= GK\,(C_2/\ell + \bar{\varphi}') - EI_{\omega\omega}\,\bar{\varphi}''' \qquad (5)$$

$\bar{\varphi}$ désigne une solution particulière qui est une fonction de la coordonnée ξ.

Cas particuliers :

a) La travée est sollicitée par un moment de torsion uniformément réparti :

Les extrémités de la travée sont maintenues à la torsion et sont libres de gauchir.

Comme la charge est symétrique, on pose :

$$\bar{\xi} = \xi - 0{,}5 \qquad (6)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\varphi(\bar{\xi} = -0{,}5) = 0 \quad ; \quad \varphi(\bar{\xi} = 0{,}5) = 0$$
$$M_\omega(\bar{\xi} = -0{,}5) = 0 \quad ; \quad M_\omega(\bar{\xi} = 0{,}5) = 0 \qquad (7)$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est :

$$\bar{\varphi} = -\ (m_D/2) \,.\, (\ell^2/GK) .\ \bar{\xi}^2 \qquad (8)$$

Par conséquent :

$$\varphi = (m_D\,\ell^2/GK)\,[(1/8 - 1/\chi^2) - (1/2)\bar{\xi}^2 +$$
$$+ \text{ch}\chi\,\bar{\xi}\,/\,(\chi^2\,\text{ch}\,(\chi/2))] \qquad (9)$$

$$T_s = GK\,\varphi' = - m_D\ell\,(\bar{\xi} - \text{sh}\chi\bar{\xi}\,/\,(\chi\text{ch}\,(\chi/2))) \qquad (10)$$

$$M_\omega = -EI_{\omega\omega}\,\varphi'' = (m_D\,\ell^2/\chi^2)\,(1 - \text{ch}\chi\bar{\xi}\,/\,\text{ch}\,(\chi/2)) \qquad (11)$$

$$T = GK\,\varphi' - EI_{\omega\omega}\,\varphi''' = - m_D\,\ell\bar{\xi} \qquad (12)$$

L'équation (10) nous permet de déterminer les termes de charges a_{io} et b_{io} qui correspondent à un moment de torsion uniformément réparti sollicitant une travée en torsion mixte. On a :

$$a_{io} = \varphi'(\bar{\xi} = -0{,}5) \quad \text{et} \quad b_{io} = -\varphi'(\bar{\xi} = 0{,}5) \qquad (13)$$

d'où :

$$a_{io} = b_{io} = (m_D\,\ell\,/\,2GK)\ (1 - (2/\chi)\ \text{th}\,(\chi/2)) \qquad (14)$$

b) La travée est sollicitée par un bimoment X à uneextrémité :

Appliquons un bimoment X à l'extrémité $\xi = 1$. Les extrémités de la travée sont maintenues à la torsion et sont libres de gauchir.

Les conditions aux limites sont :

$$\varphi\,(\xi = 0) \quad ; \quad \varphi\,(\xi = 1) = 0$$
$$M_\omega\,(\xi = 0) \ ; \ M_\omega\,(\xi = 1) = X \qquad (15)$$

Solution particulière de l'équation :

$$\bar{\varphi} = 0 \qquad (16)$$

Il résulte :

$$\varphi = (X/GK)\,(\xi - \text{sh}\chi\xi\,/\,\text{sh}\,\chi) \qquad (17)$$

$$T_s = (X/\ell)\,(1 - \chi\,.\,\text{ch}\chi\xi\,/\,\text{sh}\,\chi) \qquad (18)$$

$$M_\omega = X\,(\text{sh}\chi\xi\,/\,\text{sh}\,\chi) \qquad (19)$$

$$T = X/\ell \qquad (20)$$

c) La travée est sollicitée par deux bimoments X_k et X_{k+1} à ses entrémités :

En posant $\xi' = 1 - \xi$ et en utilisant les résultats obtenus en (b) on obtient :

$$\varphi = (X_k/GK)\,(\xi' - \text{sh}\chi\xi'/\text{sh}\,\chi) +$$
$$+ (X_{k+1}/GK)\,(\xi - \text{sh}\chi\xi\,/\,\text{sh}\,\chi) \qquad (21)$$

$$T_s = -(X_k/\ell)\,(1 - \chi\,.\,\text{ch}\chi\xi'/\text{sh}\,\chi) +$$
$$+ (X_{k+1}/\ell)\,(1 - \chi\,.\,\text{ch}\chi\xi\,/\,\text{sh}\,\chi) \qquad (22)$$

$$M_\omega = X_k\,.\,\text{sh}\chi\xi'/\text{sh}\,\chi + X_{k+1}\,.\,\text{sh}\chi\xi\,/\,\text{sh}\,\chi \qquad (23)$$

$$T = (X_{k+1} - X_k)\,/\,\ell \qquad (24)$$

2.2 Cas de plusieurs travées droites sollicitées en torsion mixte

Les conditions aux limites sont définies par les équations (7).

La résolution se fait en 3 étapes :

1° - résolution du système des équations des 3 bimoments (AE n°2) ;

2° - calcul du paramètre χ caractérisant chacune des travées (il y'a lieu donc de déterminer les caractéristiques géométriques - y compris les caractéristiques sectorielles - pour chacune des ces travées) (AE n°0) ;

3° - calcul des déformations et des efforts intérieurs.

2.3 Cas de plusieurs travées biaises sollicitées en torsion mixte

Nous devons envisager les conséquences du biais en torsion non-uniforme et en torsion de Saint-Venant.

Les conséquences du biais en torsion non-uniforme ont déjà été relatées dans notre article précédent (AE n°2) ; nous nous bornons ici à traiter celles dues à la torsion de Saint-Venant.

2.3.1 Conséquences du biais en torsion de Saint-Venant

Nous retraçons ci-après quelques résultats importants de la théorie de Saint-Venant - appliquée à des éléments sur appuis biais - qui interviennent dans nos applications.

Cette théorie est relatée avec plus de détails dans les références [4], [5] et [6] .

a) Charge uniformément répartie centrée

Sous une charge uniformément répartie centrée, verticale, la raideur à la torsion de Saint-Venant engendre un moment de torsion secondaire :

$$T_i = -(\alpha_i \operatorname{tg}\delta_k + \beta_i \operatorname{tg}\delta_{k+1}) / \gamma_i \qquad (25)$$

où

$$\gamma_i = \int_0^{\ell_i} dz/GK \qquad (26)$$

α_i et β_i sont les déformations angulaires aux appuis k et k+1 ;

δ_k et δ_{k+1} sont les biais aux appuis k et k+1 ;

γ_i est le coefficient de déplacement pour la travée i.

Comme en torsion non-uniforme ce moment donne naissance à des moments de flexion supplémentaires ΔM_{ki} et ΔM_{k+1i} aux appuis tels que :

$$\Delta M_{ki} = T_i \operatorname{tg}\delta_k$$
$$\Delta M_{k+1} = T_i \operatorname{tg}\delta_{k+1} \qquad (27)$$

En remplaçant dans (25) les déformations angulaires α_i et β_i par leurs valeurs respectives - qui peuvent être calculées -, on obtient l'expression du moment de torsion dans le cas général :

$$\begin{aligned} T_i = (-1/\gamma_i D_i) [\, & \alpha_{io} \operatorname{tg}\delta_k + \beta_{io} \operatorname{tg}\delta_{k+1} + \\ & + M_k (\alpha_{ik} \operatorname{tg}\delta_k + \beta_{ik} \operatorname{tg}\delta_{k+1}) + \\ & + M_{k+1} (\alpha_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_k + \beta_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_{k+1})] \end{aligned} \qquad (28)$$

où :

$$D_i = 1 + C_{i\alpha k} + C_{i\beta k+1}$$

avec :

$$C_{i\alpha k} = (\operatorname{tg}\delta_k (\alpha_{ik} \operatorname{tg}\delta_k + \alpha_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_{k+1})) / \gamma_i$$
$$C_{i\beta k+1} = (\operatorname{tg}\delta_{k+1} (\beta_{ik} \operatorname{tg}\delta_k + \beta_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_{k+1})) / \gamma_i \qquad (29)$$

<u>**Cas particulier**</u> :

$$\delta_k = \delta_{k+1}$$

EI_i et GK_i constantes.

Les constantes définies par (29) sont alors égales à C telle que :

$$C_i = (GK_i / EI_i)(\operatorname{tg}^2 \delta / 2) \qquad (30)$$

On a donc :

$$T_i = -(1/\operatorname{tg}\delta)(2C_i / (1+2C_i))[EI_i (\alpha_{io} + \beta_{io}) / \ell_i + (M_k + M_{k+1}) / 2] \qquad (31)$$

Les autres efforts intérieurs - moments sur appuis et en travée, efforts tranchants - se déterminent de manière similaire à la torsion non-uniforme (voir AE n°2) en remplaçant toutefois T_{ki} et T_{k+1i} par T_i.

b) Charge uniformément répartie excentrée

Ce cas de charge est équivalent à une charge uniformément répartie centrée (p) et au moment de torsion uniformément réparti (m_D).

Ce dernier donne naissance à des moments de torsion $T^{(f)}_{ki}$ et $T^{(f)}_{k+1i}$ dont les termes de charge sont :

$$\alpha_{iD} = T^{(f)}_{ki}\ \alpha_{ik} \cdot \operatorname{tg}\delta_k + T^{(f)}_{k+1i}\ \alpha_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_{k+1}$$
$$\beta_{iD} = T^{(f)}_{ki}\ \beta_{ik} \cdot \operatorname{tg}\delta_k + T^{(f)}_{k+1i}\ \beta_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_{k+1} \qquad (32)$$

avec :

$$T^{(f)}_{ki} = m_D \ell / 2 \quad \text{et} \quad T^{(f)}_{k+1i} = -m_D \ell / 2 \qquad (33)$$

Les termes de charges correspondant à ce cas sont alors :

$$(\alpha_{io} + \alpha_{iD}) \text{ et } (\beta_{io} + \beta_{iD}).$$

Un développement similaire à celui du précédent paragraphe conduit à une formulation du moment de torsion.

Dans le cas général :

$$\begin{aligned} T_i = -(1/\gamma_i D_i) [& (\alpha_{io} + \alpha_{iD}) \operatorname{tg}\delta_k + (\beta_{io} + \beta_{iD}) \operatorname{tg}\delta_{k+1} + \\ & + M_k(\alpha_{ik} \operatorname{tg}\delta_k + \beta_{ik} \operatorname{tg}\delta_{k+1}) + \\ & + M_{k+1} (\alpha_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_k + \beta_{ik+1} \operatorname{tg}\delta_{k+1})] \end{aligned} \qquad (34)$$

Les autres efforts intérieurs se déterminent de manière analogue au cas précédent mais avec :

$$T_{ki} = T_i + T^{(f)}_{ki} \quad \text{et} \quad T_{k+1i} = T_i + T^{(f)}_{k+1i} \qquad (35)$$

2.3.2 Conséquences du biais en torsion mixte

En torsion mixte, les diverses influences des torsions non-uniforme et de Saint-Venant décrites précédemment se superposent.

Afin d'atténuer la lourdeur des expressions (24) et (25) (AE n°2), obtenues en torsion non-uniforme, nous supposons que ε_{ki} et ε_{k+1i} sont négligeables (cas usuel).

Nous obtenons les résultats suivants :

a) Déformations angulaires :

$$\alpha_i = M_k\alpha_{ik} + M_{k+1}\alpha_{ik+1} + \alpha_{io} + T_{ki}^{(f)}\alpha_{ik}\,tg\delta_k + T_{k+1i}^{(f)}\alpha_{ik+1}\,tg\delta_{k+1}$$
$$+ (\alpha_{ik}\,tg\delta_k + \alpha_{ik+1}\,tg\delta_{k+1})(X_{k+1} - X_k)/\ell_i$$
$$- (\alpha_{ik}\,tg\delta_k + \alpha_{ik+1} + tg\delta_{k+1})(\alpha_i\,tg\delta_k + \beta_i\,tg\delta_{k+1})/\gamma_i \tag{36}$$

$$\beta_i = M_k\beta_{ik} + M_{k+1}\beta_{ik+1} + \beta_{io} + T_{ki}^{(f)}\beta_{ik}\,tg\delta_k + T_{k+1i}^{(f)}\beta_{ik+1}\,tg\delta_{k+1} +$$
$$+ (\beta_{ik}\,tg\delta_k + \beta_{ik+1}\,tg\delta_{k+1})(X_{k+1} - X_k)/\ell_i$$
$$- (\beta_{ik}\,tg\delta_k + \beta_{ik+1}\,tg\delta_{k+1})(\alpha_i\,tg\delta_k + \beta_i tg\delta_{k+1})/\gamma_i$$

Nous distinguons dans chacune de ces expressions les influences des éléments suivants sur les déformations angulaires :

❑ <u>1ère ligne</u> :

- Moments de continuité (M_k et M_{k+1}) et termes de charges (α_{io} et β_{io}) ; ce sont les termes qui subsistent dans les cas habituels où les effets de la torsion ne sont pas considérés.
- Moment de torsion uniformément réparti : ($T_{ki}^{(f)}$ et $T_{k+1i}^{(f)}$).

❑ <u>2ème ligne</u> :

- Bimoments (X_k et X_{k+1}).

❑ <u>3ème ligne</u> :

- Moments de torsion de Saint-Venant (T_i) : voir équation (25).

b) Efforts intérieurs

❑ <u>**Moments de torsion**</u>

Un artifice de calcul analogue à celui établi ci-dessus, dans la théorie de la torsion de Saint-Venant pour aboutir à l'expression (28), permet de déterminer le moment de torsion aux extrémités de la travée sollicitée en torsion mixte :

$$T_{ii} = -(1/\gamma_i D_i)\,[(\alpha_{io} + \alpha_{iD} + \alpha_{ix})\,tg\delta_k +$$
$$+ (\beta_{io} + \beta_{iD} + \beta_{ix})\,tg\delta_{k+1} + M_k(\alpha_{ik}\,tg\delta_k +$$
$$\beta_{ik}\,tg\delta_{k+1}) + M_{k+1}(\alpha_{ik+1}\,tg\delta_k + \beta_{ik+1}\,tg\delta_{k+1})] \tag{38}$$

avec :

$$\alpha_{ix} = (\alpha_{ik}\,tg\delta_k + \alpha_{ik+1}\,tg\delta_{k+1})(X_{k+1} - X_k)/\ell_i$$
$$\beta_{ix} = (\beta_{ik}\,tg\delta_k + \beta_{ik+1}\,tg\delta_{k+1})(X_{k+1} - X_k)/\ell_i \tag{37}$$

En tenant compte de la contribution de la torsion non-uniforme, conformément à l'expression (21) (AE n°2), le moment de torsion en travée s'exprime :

$$T_i = T_i^{(f)} + ({}_\omega M_{k+1i} - {}_\omega M_{ki})/\ell_i + T_{ii} \tag{39}$$

sur appuis :

$$T_{ki} = T_{ki}^{(f)} + ({}_\omega M_{k+1i} - {}_\omega M_{ki})/\ell_i + T_{ii}$$
$$T_{k+1i} = T_{k+1i}^{(f)} + ({}_\omega M_{k+1i} - {}_\omega M_{ki})/\ell_i + T_{ii} \tag{40}$$

❑ **Moments de torsion dus à la torsion de Saint-Venant et à la torsion non uniforme en torsion mixte :**

En utilisant les résultats obtenus au paragraphe 2.1.3.c on obtient :

❑ **Moment de torsion dû à la torsion de Saint-Venant en torsion mixte :**

$$T_{si} = {}_sT_{io} - ({}_\omega M_{ki}/\ell_i)\,(1 - \chi_i\,ch\,\chi_i\,\xi'_i/sh\,\chi_i) +$$
$$+ ({}_\omega M_{k+1i}/\ell_i)\,(1 - \chi_i\,ch\,\chi_i\,\xi_i/sh\,\chi_i) + T_{ii} \tag{41}$$

❑ **Moment de torsion dû à la torsion non-uniforme en torsion mixte :**

$$T_{\omega i} = {}_\omega T_{io} - ({}_\omega M_{ki}/\ell_i)\ \chi_i\,.\,ch\,\chi_i\,\xi'_i/sh\,\chi_i) +$$
$$+ ({}_\omega M_{k+1i}/\ell_i).\,\chi_i\,.\,ch\,\chi_i\,\xi'_i/sh\,\chi_i) \tag{42}$$

La détermination des moments de torsion exprimés par les équations (38) à (42) nécessite néanmoins la connaissance préalable des bimoments ${}_\omega M_{ki}$ et ${}_\omega M_{k+1i}$ et des moments de continuité M_k et M_{k+1}.

Dans le cas général où on a plusieurs travées successives, la solution du problème est obtenue par itérations.

Comme dans le cas de la torsion non-uniforme, les moments de torsion T_{ki} et T_{k+1i} aux extrémités ne sont pas connus.

Des considérations analogues à celles envisagées dans la théorie de la torsion non-uniforme montrent que les expressions (24) (AE n°2) sont encore valables si on remplace le moment de torsion T_i de ces expressions par T_{ii} donné par (38).

Les principales étapes de l'itération se présentent comme suit :

1°) En première approximation, nous supposons que les bimoments ${}_\omega M_{ki}$ et X_k sont nuls ; il résulte que les termes de charge α_{ix} et β_{ix} le sont aussi.

Les équations (2) (AE n°2), obtenues en remplaçant β_{i-1} et α_i par leurs valeurs, et où nous remplaçons les termes de charges α_{io} et β_{io} par leurs valeurs correspondantes en torsion mixte (respectivement $(\alpha_{io} + \alpha_{iD} + \alpha_{ix})$ et $(\beta_{io} + \beta_{iD} + \beta_{ix})$) permettent de calculer les moments de continuité M_k.

2°) Connaissant les valeurs des moments M_k, les expressions de α_i et β_i, formulées en torsion de Saint-Venant, mais où α_{io} et β_{io} sont remplacées par leurs valeurs correspondantes en torsion mixte, déterminent les déformations angulaires.

3°) Les valeurs de M_k peuvent aussi être adoptées en première approximation pour déterminer les moments de torsion T_{ki} et T_{k+1i} d'après les expressions (40).

4°) A ce stade, nous pouvons déterminer M_{ki} et Q_{ki} à l'aide des expressions (15) et (17) (AE n°2).

5°) Les valeurs α_i, β_i et Q_{ki} permettent de calculer les termes de charge des équations des 3 bimoments qui découlent de l'hypothèse formulée par (2) (AE n°2) et des expressions (14) (AE n°2).

6°) Les valeurs des bimoments X_k qui en résultent permettent le calcul des bimoments ${}_{\omega}M_{ki}$ au moyen des expressions (19) (AE n°2).

7°) Enfin, avec les bimoments X_k, nous pouvons calculer également les 1ères valeurs des termes de charges α_{ix} et β_{ix} (37).

Un second cycle de l'itération peut alors être entrepris.

c) Rotation

En torsion mixte, la rotation de la travée due aux bimoments peut être calculée au moyen de l'expression (21) en remplaçant toutefois X_k par ${}_{\omega}M_{ki}$, plus précis, car il tient compte de l'influence du biais.

Lorsque la travée est sollicitée en plus par un moment de torsion uniformément réparti (cas usuel), il y a lieu de superposer aux rotations dues aux bimoments la valeur exprimée par (9).

La rotation finale de la travée sollicitée en torsion mixte est :

$$\begin{aligned}\varphi = {} & (m_{Di} \cdot \ell_i^2/GK_i)[(1/8 - 1/\chi_i^2) - \xi^2/2 + \\ & + \mathrm{ch}\chi_i\, \xi_i /(\chi_i^2\, \mathrm{ch}\,(\chi_i/2))] + ({}_{\omega}M_{ki}/GK_i) \\ & (\xi'_i - \mathrm{sh}\chi_i\, \xi'_i / \mathrm{sh}\,\chi_i) + ({}_{\omega}M_{k+1i}/GK_i) \\ & (\xi_i - \mathrm{sh}\chi_i\, \xi_i / \mathrm{sh}\,\chi_i)\end{aligned} \tag{43}$$

Les autre déformations - en l'occurence les déformées, les gauches et les déplacements verticaux des points d'appuis des rails sur le tablier - sont calculées selon les mêmes formulations qu'en torsion non-uniforme mais en leur adaptant les grandeurs définies ci-dessus en torsion mixte.

3 CONCLUSION

Cet article est consacré à la théorie utilisée lors de calcul de déformations de ponts ferroviaires sollicités en torsion mixte.

Les cas de chargements usuels sont envisagés et on y fait ressortir les contributions des deux torsions non-uniforme et de Saint-Venant.

Il reste cependant à communiquer l'ensemble des résultats obtenus théoriquement lors d'applications sur des ouvrages réels.

Ces valeurs sont ensuite confrontées d'une part, à des résultats d'essais, et d'autre part, à des valeurs théoriques qui proviennent d'un autre code de calcul basé sur la méthode des éléments finis.

A cette issue, nous faisons apparaître la validité de la modélisation adoptée et la justesse de la méthode de calcul développée.

Nous y faisons ressortir également, l'importance de certaines déformations complémentaires qui proviennent des effets de torsion - non-uniforme ou mixte - et qui s'avèrent parfois non négligeables ❺

4 BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Baes, A. Lipski - "La poutre préflex". La précompression du béton enrobant l'aile tendue. - Le problème du retrait et du fluage. - Conclusions fondamentales. Fasc 3, 1957.

[2] L. Baes, A. Lipski - "La poutre préflex". Principes - Description - Calcul. Fasc. 1, 2ème ed., 1966.

[3] L. Baes, A. Lipski - "La poutre préflex". Principes - Notes de calculs - Notes descriptives. Fasc. 2, 1954.

[4] J. Courbon - "Résistance des matériaux", Tome 2. Dunod, 2ème ed., 1971.

[5] H. Homberg, R. Marx - "Shiefe Stäbe und Platter". A59. Wezner Verlag GMBH. Düsseldorf.

[6] C.F. Kollbrunner, K. Basler - "Torsion". Edition SPES, Lausanne, 1971.